物質科学解析 第2回 微分法

2009/4/8
西田貴司 (@F511)

微分法を使う場合

1. 時間変化などの変化率を知りたい。
   ex. 速度=距離/時間、電流=電荷/時間
2. 極大、極小点を知りたい
   ex. 安定点、最小二乗法
3. 関数のn次曲線での近似
   ex. テーラー展開、マクローリン展開
4. 自然現象の記述と解析
   ex. 微分方程式

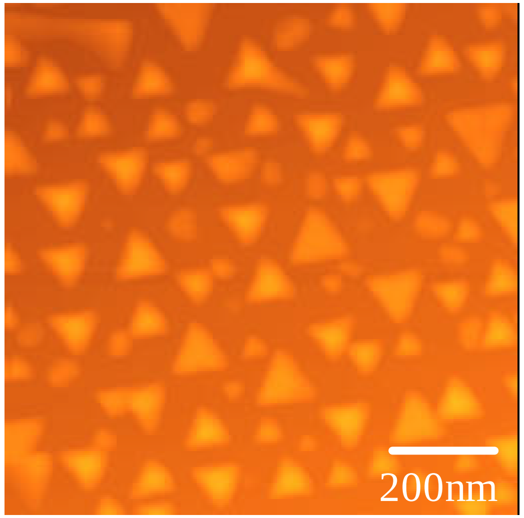
高木貞治: 解析概論 (岩波)

微分法を使う場合: 研究では?

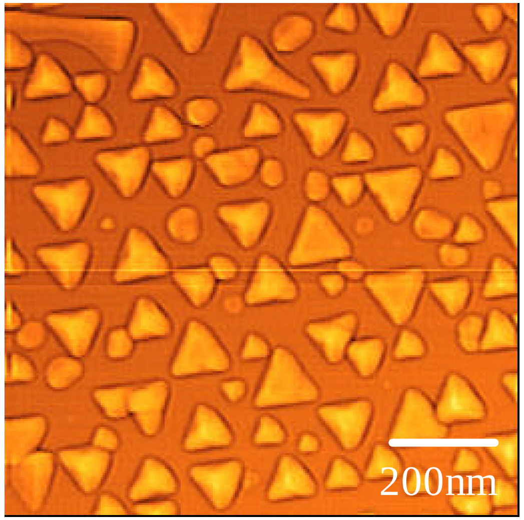
ex.1. 電子の有効質量 m^* $$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2}\frac{d^2E}{dk^2}$$

ex.2. 反応速度論 $\mathrm{A} \xrightarrow{k}$ 生成物 $$\frac{d[\textbf{生成物}]}{dt} = k[A]$$

ex.3. 数値微分(差分): 各種シミュレーション、画像処理

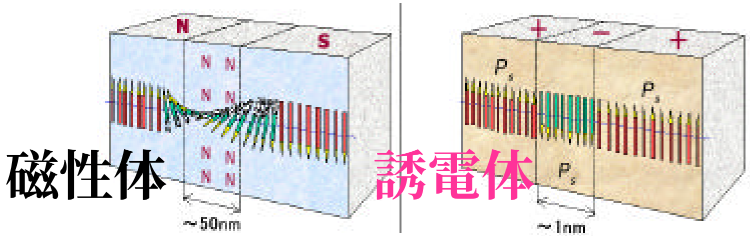


エッジ抽出
(微分)
→粒径測定
→ 画像鮮明化

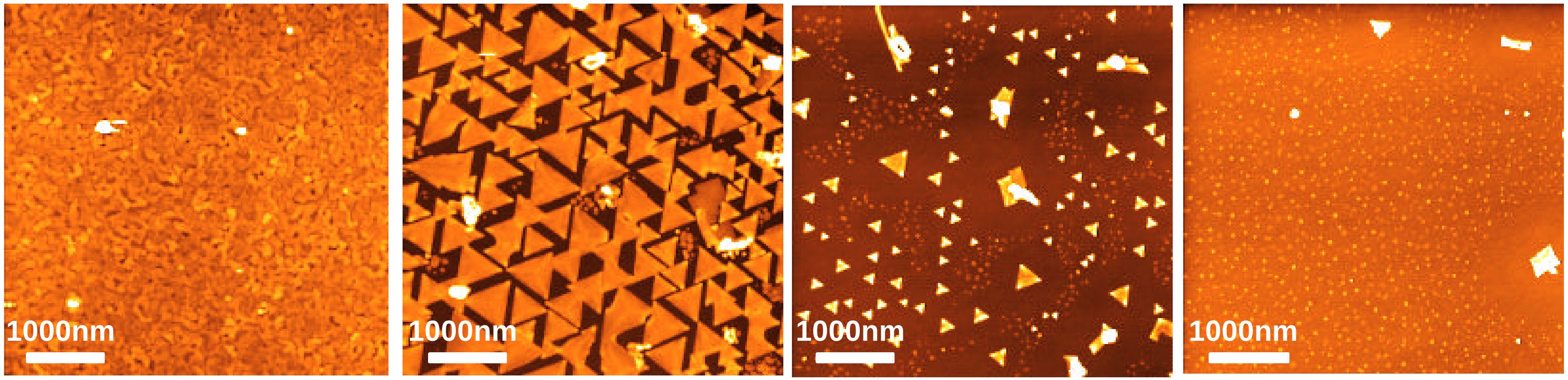


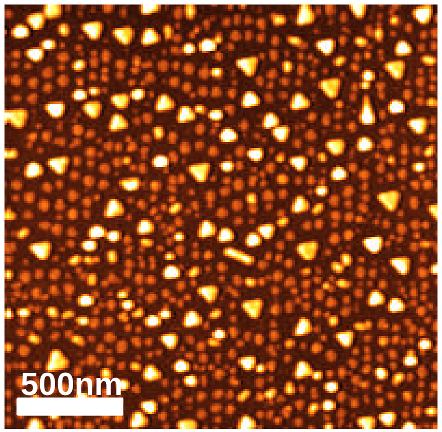
その他いろいろ。

AFM像の解析



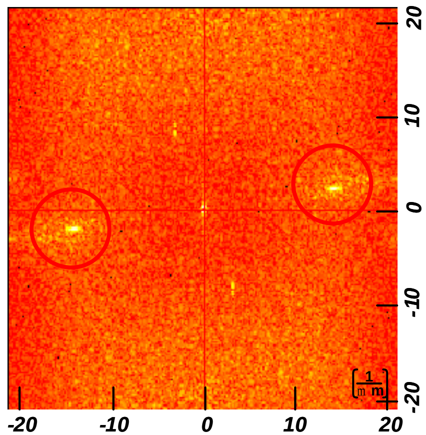
メモリ材料(強誘電体)の超微細化(ナノ化)による超大容量化

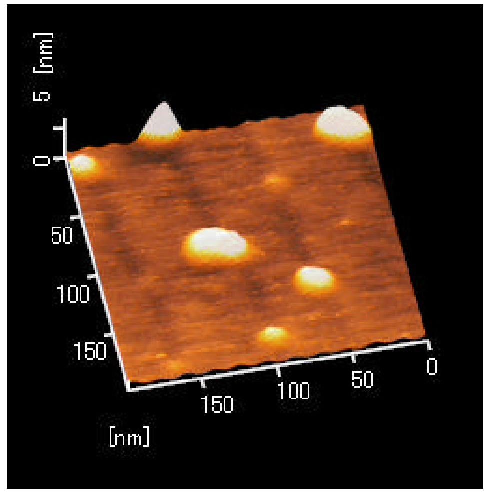




0.3T/sqi

FFT像





微分法を使う場合: 微分方程式

運動方程式

$$m\mathbf{a} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

電磁方程式

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \nabla \bullet \mathbf{D} = r$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \nabla \bullet \mathbf{B} = 0$$

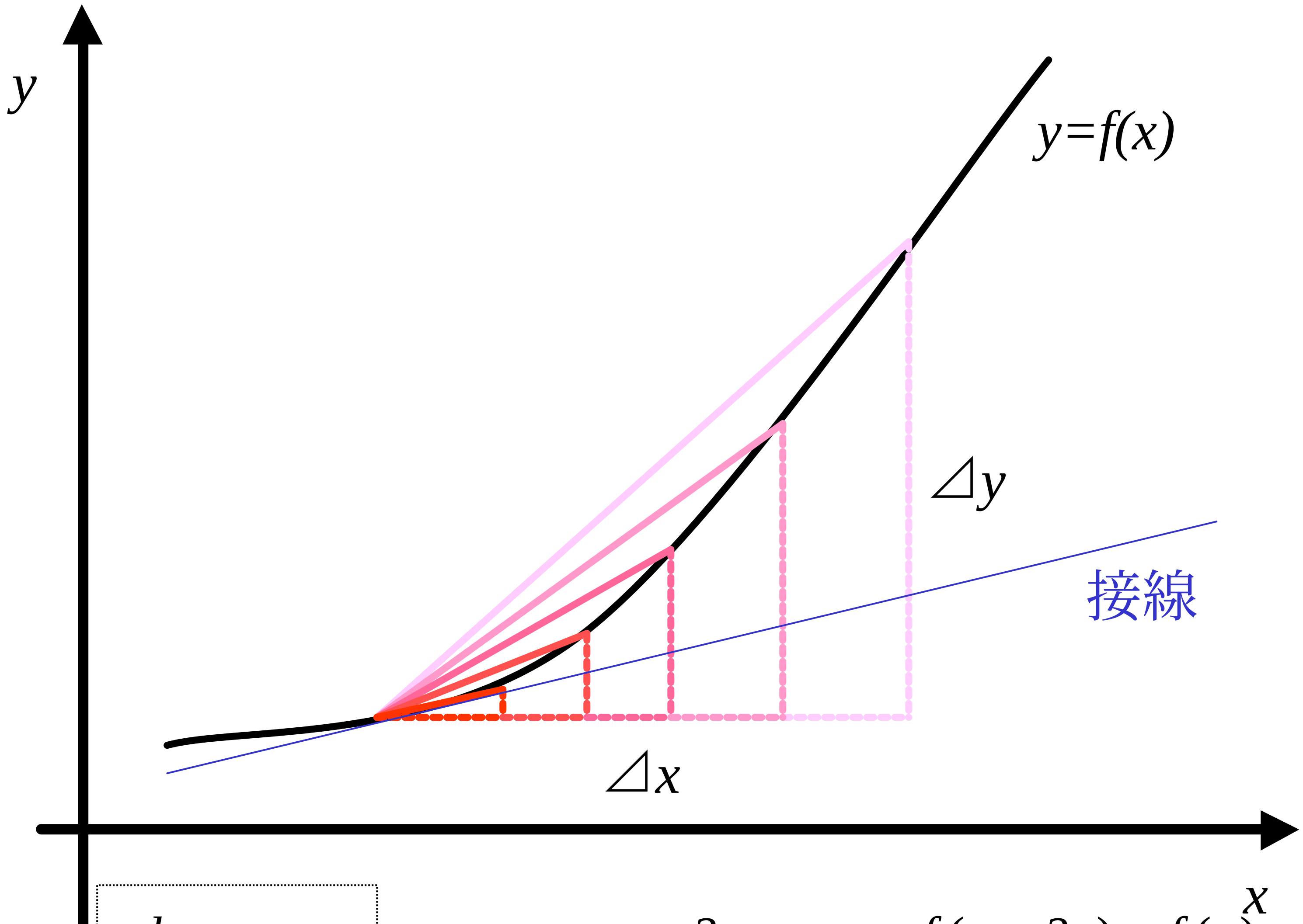
$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}$$

シュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + V(x)y$$

微分とは?



$$\frac{dy}{dx} = y' = \dot{y} = f'(x) = \lim_{?x\to 0}\frac{?y}{?x} = \lim_{?x\to 0}\frac{f(x+?x)-f(x)}{?x}$$

各種の表記

微分の具体例

● $y = x^2$

$$y + ?y = (x + ?x)^2$$

$$?y = (x + ?x)^2 - x^2 = 2x \cdot ?x + ?x^2$$

$$\frac{?y}{?x} = 2x + ?x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{?x \to 0} \frac{?y}{?x} = 2x$$

● $y = x^3$

$$y + ?y = (x + ?x)^3 = x^3 + 3x^2\, ?x + 3x \cdot ?x^2 + ?x^3$$

$$?y = 3x^2\, ?x + 3x \cdot ?x^2 + ?x^3$$

$$\frac{?y}{?x} = 3x^2 + 3x \cdot ?x + ?x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?y}{?x} = 3x^2$$

演習 (1) $y = x^4$ (2) $y = x^5$ (3) $y = x^6$ (4) $y = x^7$

$\boxed{\text{解答}}$ $y = x^4$

$$y = x^4$$

$$y + ?y = (x + ?x)^4 = x^4 + 4x^3 ?x + 6x^2 ?x^2 + 4x \cdot ?x^3 + ?x^4$$

$$?y = 4x^3 ?x + 6x^2 ?x^2 + 4x \cdot ?x^3 + ?x^4$$

$$\frac{?y}{?x} = 4x^3 + 6x^2 ?x + 4x \cdot ?x^2 + ?x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{?y}{?x} = 4x^3$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

パスカルの三角形

微分の具体例

- $y = x^n$

$$y + ?y = (x + ?x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^{n-r} ?x^r$$

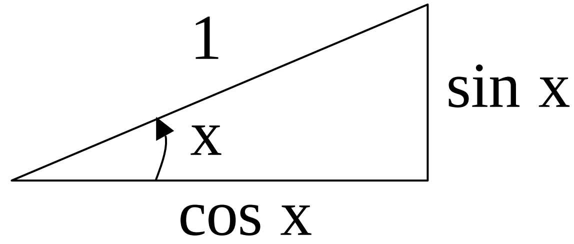
$$\text{ただし}\ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, {}_n\mathrm{C}_1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

$$?y = \sum_{r=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^{n-r} ?x^r = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} ?x + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} ?x^2 + \ldots$$

$$\frac{?y}{?x} = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} ?x + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} = nx^{n-1}$$

$y = \sin x$　では　$y + ?y = \sin(x + ?x) = ?$



三平方の定理から　$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
オイラーの公式　$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$
$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$

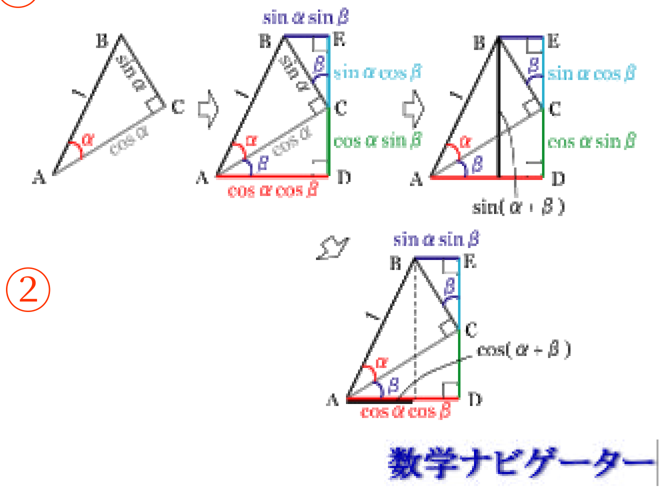
$e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \cdot \sin(x+y)$　　オイラー公式から..①

$e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$　　指数法則から

$= (\cos x + i \cdot \sin x)(\cos y + i \cdot \sin y)$　　オイラー公式から

$= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i \cdot \sin x \cos y + i \cdot \cos x \sin y$

$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i \cdot (\sin x \cos y + \cos x \sin y)$　②



①と②から加法定理が導出

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

さらに

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$　　　$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2\cos x \sin y$　　　$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2\sin x \sin y$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$　　　$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

微分の具体例

- $y = \sin x$　　ただし $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

ロピタル定理 or
sin x < x < tan x から
(つまり cos x< sin x/x < 1)

$$?y = (y + ?y) - y = \sin(x + ?x) - \sin x = 2\cos(x + \frac{?x}{2})\sin(\frac{?x}{2})$$

$$\frac{?y}{?x} = \frac{2\cos(x + ?x/2)\sin(?x/2)}{?x} = \cos(x + ?x/2)\cdot\frac{\sin(?x/2)}{?x/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{?x \to 0} \cos(x + ?x/2)\cdot\frac{\sin(?x/2)}{?x/2} = \cos x$$

x　　　　　　　　1

演習　$y = \cos x$

$\boxed{\text{解答}}$ $y = \cos x$

$$?y = (y + ?y) - y = \cos(x + ?x) - \cos x = -2\sin(x + \frac{?x}{2})\sin(\frac{?x}{2})$$

$$\frac{?y}{?x} = -\frac{2\sin(x + ?x/2)\sin(?x/2)}{?x} = -\sin(x + ?x/2)\cdot\frac{\sin(?x/2)}{?x/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{?x\to 0}\sin(\underbrace{x + ?x/2}_{x})\cdot\underbrace{\frac{\sin(?x/2)}{?x/2}}_{1} = -\sin x$$

基本的な関数の微分

y	$\xrightarrow{微分}$ y'	$\xrightarrow{微分}$ y''	$\xrightarrow{微分}$ $y^{(3)}$	$\xrightarrow{微分}$ $y^{(4)}$
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$		
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
$\log x$	$1/x$	$-1/x^2$		

基本的な微分公式

関数の積

- $y = f(x) \cdot g(x)$

$$?y = (y + ?y) - y = f(x + ?x) \cdot g(x + ?x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$= f(x + ?x) \cdot g(x + ?x) - f(x) \cdot g(x + ?x) + f(x) \cdot g(x + ?x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{?y}{?x} = \frac{f(x + ?x) \cdot g(x + ?x) - f(x) \cdot g(x + ?x)}{?x} + \frac{f(x) \cdot g(x + ?x) - f(x) \cdot g(x)}{?x}$$

$$= \frac{f(x + ?x) - f(x)}{?x} \cdot g(x + ?x) + f(x) \cdot \frac{g(x + ?x) - f(x)}{?x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

合成関数

- $y = f(u), u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

逆関数

- $x = f(y)$,つまり$y = f^{-1}(x)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df(y)}{dy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}$$

微分公式の使用例

- $y = \boxed{x^3}\boxed{\sin x}$

$$y' = (x^3)'\sin x + x^3(\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$ ...関数の積の微分

$$= x^2(3\sin x + x\cos x)$$

- $y = \boxed{(x^2+1)}^6$

$$y' = 6(x^2+1)^5 \cdot (x^2+1)' = 6(x^2+1)^5 \cdot 2x$$ ...合成関数の微分

$$= 12x(x^2+1)^5$$

- $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$, **つまり** $x = \sin y$ ...逆関数の微分

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

注意:
特に $\sin^{-1}x$ はarcsinを表す。
$\sin^{-1}x \neq 1/\sin x$

基本的な微分公式

関数の商

- $$y=\frac{f(x)}{g(x)}=f(x)\{g(x)\}^{-1}$$

$$y'=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d\{1/g(x)\}}{dx}$$

$$=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\{g(x)\}^2}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

$$y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

使用例

- $$y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

微分公式の使用例

演習

(1) $y = \cos x \cdot \log x$

(2) $y = (x^2 + 3x - 5)^{10}$

(3) $y = \cos^{-1} x$

(4) $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

解答

- $y = \cos x \cdot \log x$

$$y' = (\cos x)' \cdot \log x + \cos x \cdot (\log x)' = -\sin x \cdot \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = -\sin x \cdot \log x + \frac{\cos x}{x}$$

- $y = (x^2 + 3x - 5)^{10}$

$$y' = 10(x^2 + 3x - 5)^9 (x^2 + 3x - 5)'$$

$$y' = 10(x^2 + 3x - 5)^9 (2x + 3)$$

- $y = \cos^{-1} x$

$$x = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

解答

- $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

$$y' = \frac{(e^x)'\cos x - e^x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x\cos x + e^x\sin x}{\cos^2 x}$$

$$y' = e^x \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x}$$

その他の手法

対数微分法: 両辺のlogを取って微分

指数部にもxがあるときなどに利用

- $y = x^x$,**ただし**$(x > 0)$

$x<0$ではlog取れない

$$\log y = \log x^x = x \log x$$

両辺をxで微分

$$\frac{d(\log y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(x \cdot \log x)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log x + 1) \cdot y = (\log x + 1)x^x$$

演習　$y = x^{\sin x}$,**ただし**$x > 0$

解答

- $y = x^{\sin x}$,ただし$(x > 0)$

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$$

両辺をxで微分

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x \cdot \log x)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)' \cdot \log x + \sin x \cdot (\log x)' = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right) x^{\sin x}$$

基本的な微分公式: まとめ

微分公式のくみあわせ

$\boxed{\text{演習}}$

$$y = x^3 e^{2x} \sin x$$

解答

$$y' = (x^3 e^{2x} \sin x)'$$

$(fg)' = f'g + fg'$ 積の微分

$$y' = (x^3)'(e^{2x} \sin x) + x^3 (e^{2x} \sin x)'$$

$(fg)' = f'g + fg'$ 積の微分

$$y' = (x^3)'(e^{2x} \sin x) + x^3 (e^{2x})' \sin x + x^3 e^{2x} (\sin x)'$$

$(x^3)' = 3x^2$

三角関数の微分 $(\sin x)' = \cos x$

$$y' = 3x^2 e^{2x} \sin x + x^3 (e^{2x})' \sin x + x^3 e^{2x} \cos x$$

合成関数の微分 $(f(g(x)))' = (df(u)/du)(g(x)/dx)$

$u = 2x$

$$y' = 3x^2 e^{2x} \sin x + x^3 \frac{de^{(2x)}}{d(2x)} (2x)' \sin x + x^3 e^{2x} \cos x$$

$(e^x)' = e^x$ 指数関数の微分

$$y' = 3x^2 e^{2x} \sin x + 2x^3 e^{2x} \sin x + x^3 e^{2x} \cos x$$

高階微分、偏微分

- 高次の微分

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = f''$$

- 微分演算子: *D*, *s*, *p*, *iw*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} y = Dy \neq yD$$ (交換則は使えない)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = D^2 y$$

- 偏微分

∂/ ∂x, ∂/ ∂y

例: $f = x^2 + 2xy^2 + y^4 + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4xy + 4y^3$$

ベクトル微分

●ベクトル微分演算子

grad V (gradient 勾配), div $\mathbf{E}$ (divergence 発散), rot $\mathbf{E}$ (rotation 回転)

- grad $V = (\partial V/\partial x,\ \partial V/\partial y,\ \partial V/\partial z) = \nabla V$
- div E $= (\partial Ex/\partial x,\ \partial Ey/\partial y,\ \partial Ez/\partial z) = \nabla\cdot\mathbf{E}$
- rot E $= \left(\dfrac{\partial Ez}{\partial y}-\dfrac{\partial Ey}{\partial z},\ \dfrac{\partial Ex}{\partial z}-\dfrac{\partial Ez}{\partial x},\ \dfrac{\partial Ey}{\partial x}-\dfrac{\partial Ex}{\partial y}\right)$

$$= \nabla\times\mathbf{E}$$

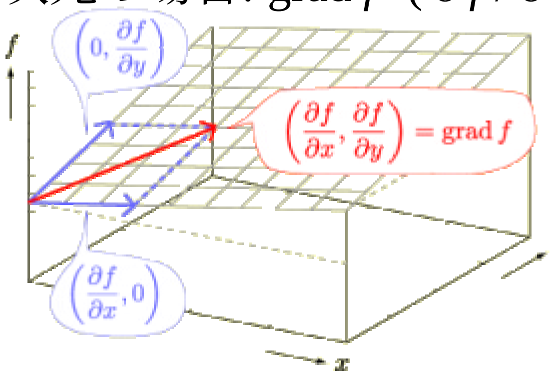
ただし、$\nabla = (\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$ (ナブラ)

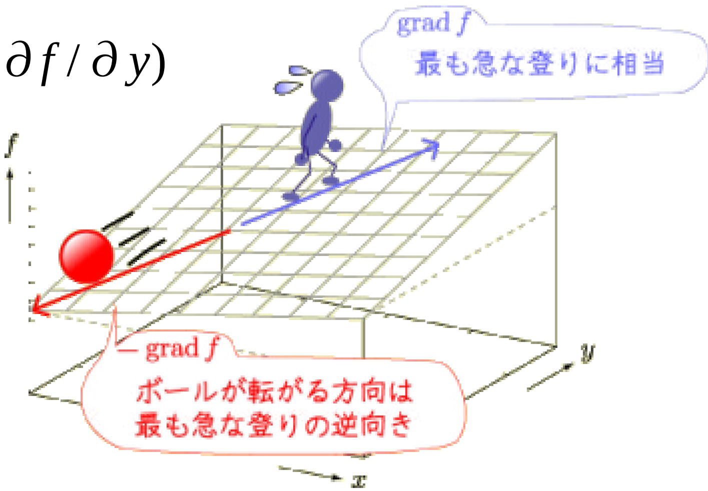
- div grad $V = (\partial^2 V/\partial x^2,\ \partial^2 V/\partial y^2,\ \partial^2 V/\partial z^2)$

$$= \nabla\cdot\nabla V = \nabla^2 V = \triangle V$$ (ラプラシアン)

ベクトルの積(スカラー積、ベクトル積)については第4回

- 意味: 2次元の場合: grad $f = (\partial f/\partial x,\ \partial f/\partial y)$





div, rot の意味については長沼「物理数学の直観的方法」など

テイラー展開、マクロ―リン展開　　概要

●下式のようなべき級数を仮定する

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

微分

$$f' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

微分

$$f'' = 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

微分

$$f''' = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + \cdots$$

微分

$$f^{(n)} = n(n-1)(n-2)\cdots 1a_n + \cdots$$

$$= n!a_n + \cdots$$

$x \to 0$

$$f(0) = a_0$$

$$f'(0) = a_1$$

$$f''(0) = 2a_2$$

$$f'''(0) = 3\cdot 2a_3$$

$$f^{(n)}(0) = n!a_n$$

微分して0を入れると
べき級数の係数a_nが求まる

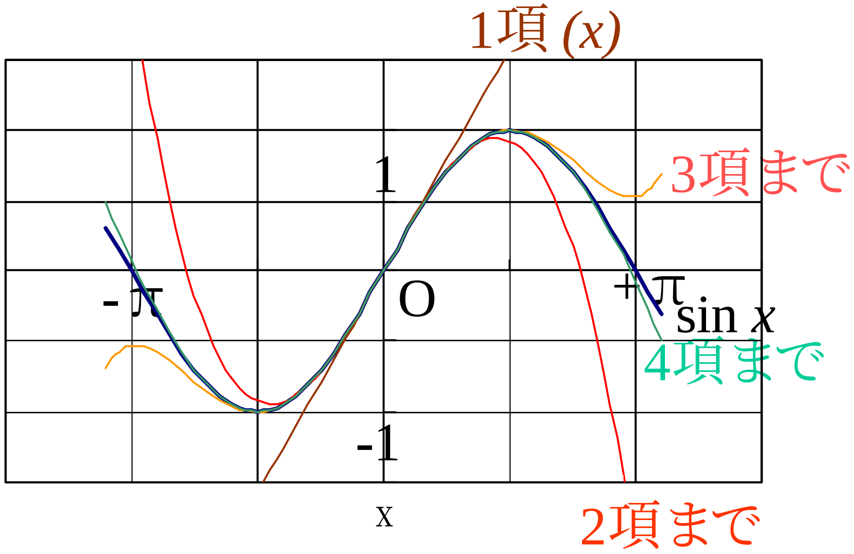
● 関数f(x)をべき級数に置き換えることができる。

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

近似式が求まる。→ (1) 計算可能 (2) 近似値

テイラー展開、マクローリン展開　例

- $f(x) = \sin x$



$$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$$
$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$
$$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & (\text{偶数の場合}) \\ (-1)^{(n-1)/2} = \dfrac{i^n}{i} & (\text{奇数の場合}) \end{cases}$$

虚数単位 i
$i^2 = -1$

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1/2}\frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (n=1,3,5,7,\ldots)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{i}\frac{(ix)^n}{n!} + \cdots \qquad (n=1,3,5,7,\ldots)$$

演習　(1) $f(x) = \cos x$　　(2) $f(x) = e^x$

解答

- $f(x) = \cos x$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\
f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\
f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\
f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= 1
\end{aligned}
$$

$$
f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{n/2} = i^n & \text{(偶数の場合)} \\ 0 & \text{(奇数の場合)} \end{cases}
$$

$$
f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (n{=}0,2,4,6,\ldots)
$$

$$
= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!} + \cdots
$$

解答

- $f(x) = e^x$

$$f(x) = e^x \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$$
$$f'''(x) = e^x \qquad f'''(0) = 1$$
$$f^{(4)}(x) = e^x \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

$$f^{(n)}(0) = 1$$

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (n=1,2,3,4,\ \ldots)$$

テイラー展開、マクロ―リン展開　　オイラーの公式

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{1}{i}\frac{(ix)^n}{n!} + \cdots$

$$\boxed{i \cdot \sin x} = ix + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \cdots + \boxed{\frac{(ix)^n}{n!}} + \cdots \qquad (n=1,3,5,7,\ldots)$$

- $\boxed{\cos x} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \boxed{\frac{(ix)^n}{n!}} + \cdots \qquad (n=0,2,4,6,\ldots)$

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \qquad (n=1,2,3,4,\ \ldots)$

$$\boxed{e^{ix}} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots + \boxed{\frac{(ix)^n}{n!}} + \cdots$$

オイラーの公式　$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$

数式処理ソフトウェアによる微分、微分方程式

数式処理ソフトウェア

- Mathematica (Wolfram research社)
  - 高機能、高価
  - ITC共用パソコンに入っています。

- MAPLE (Maple soft社)
  - 高機能、高価

- MuPAD (Sciface Software社)
  - 安価

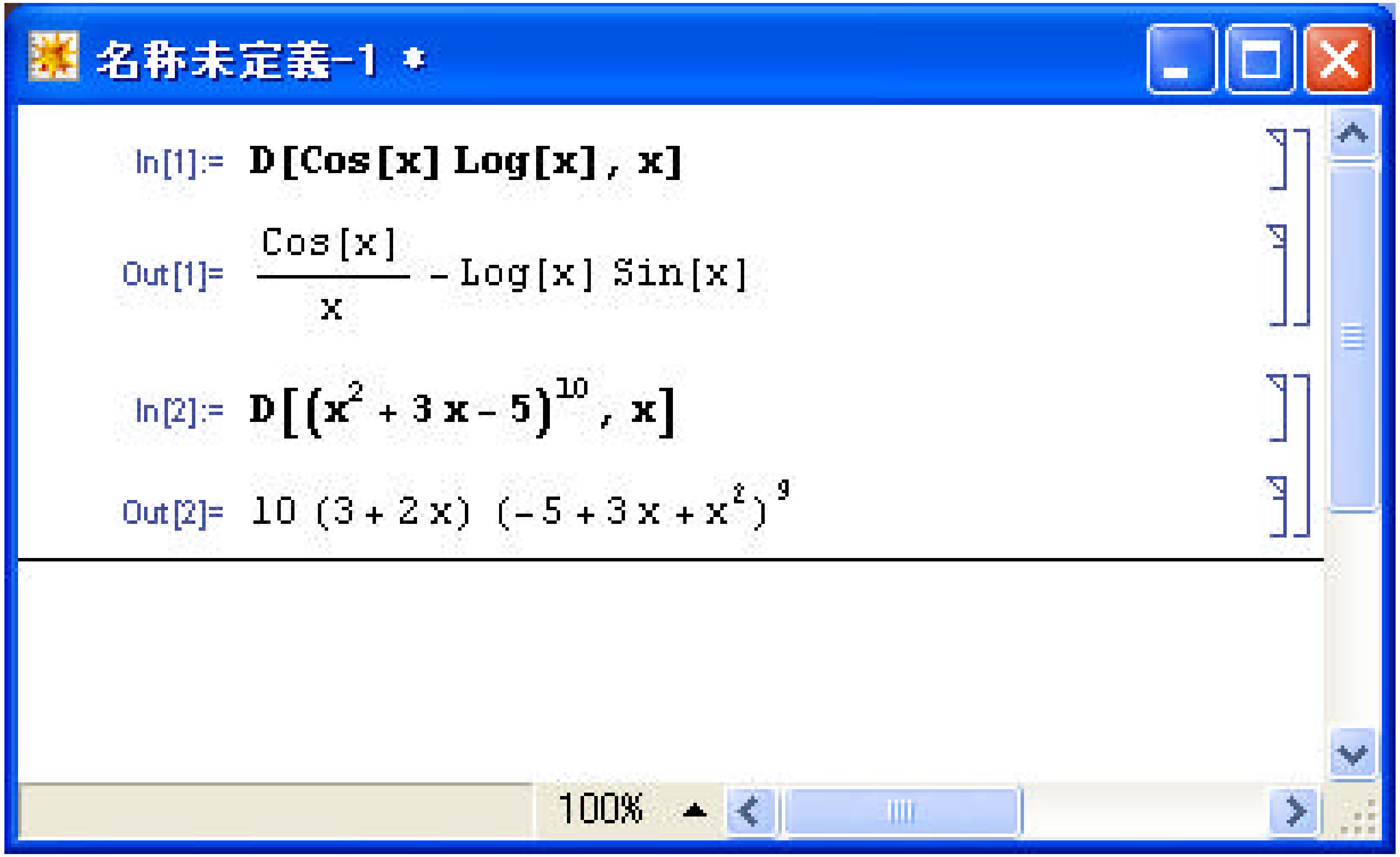
- Maxima
  - オープンソース GPL

くわしくはこちらhttp://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/Math.html

- 数式処理電卓 (TI社　TI-89 titanium, Voyage200など)
  - 安価、携帯型

数式処理ソフトウェアによる微分

Mathematicaで微分の計算



数式処理電卓による微分

TI-89 titaniumで微分の計算

Excelによる数値微分

電位: V

電界: $\mathbf{E} = -\,\mathrm{grad}\ V$

電荷: $\rho = \mathrm{div}\ \mathbf{E} = -\,\mathrm{div\ grad}\ V = -\nabla \cdot \nabla V = -\nabla^2 V = -\triangle V$

電荷=0の真空: $\nabla^2 V = \triangle V = 0$ (ラプラス方程式)

$V(-1,-1)$	$V(0,-1)$	$V(+1,-1)$
$V(-1,0)$	$\mathbf{V(0,0)}$	$V(+1,0)$
$V(-1,+1)$	$V(0,+1)$	$V(+1,+1)$

差分近似: $\triangle V$ @(0,0) $=\{V(-1,0)+V(+1,0)+V(0,-1)+V(0,+1)\}/4$