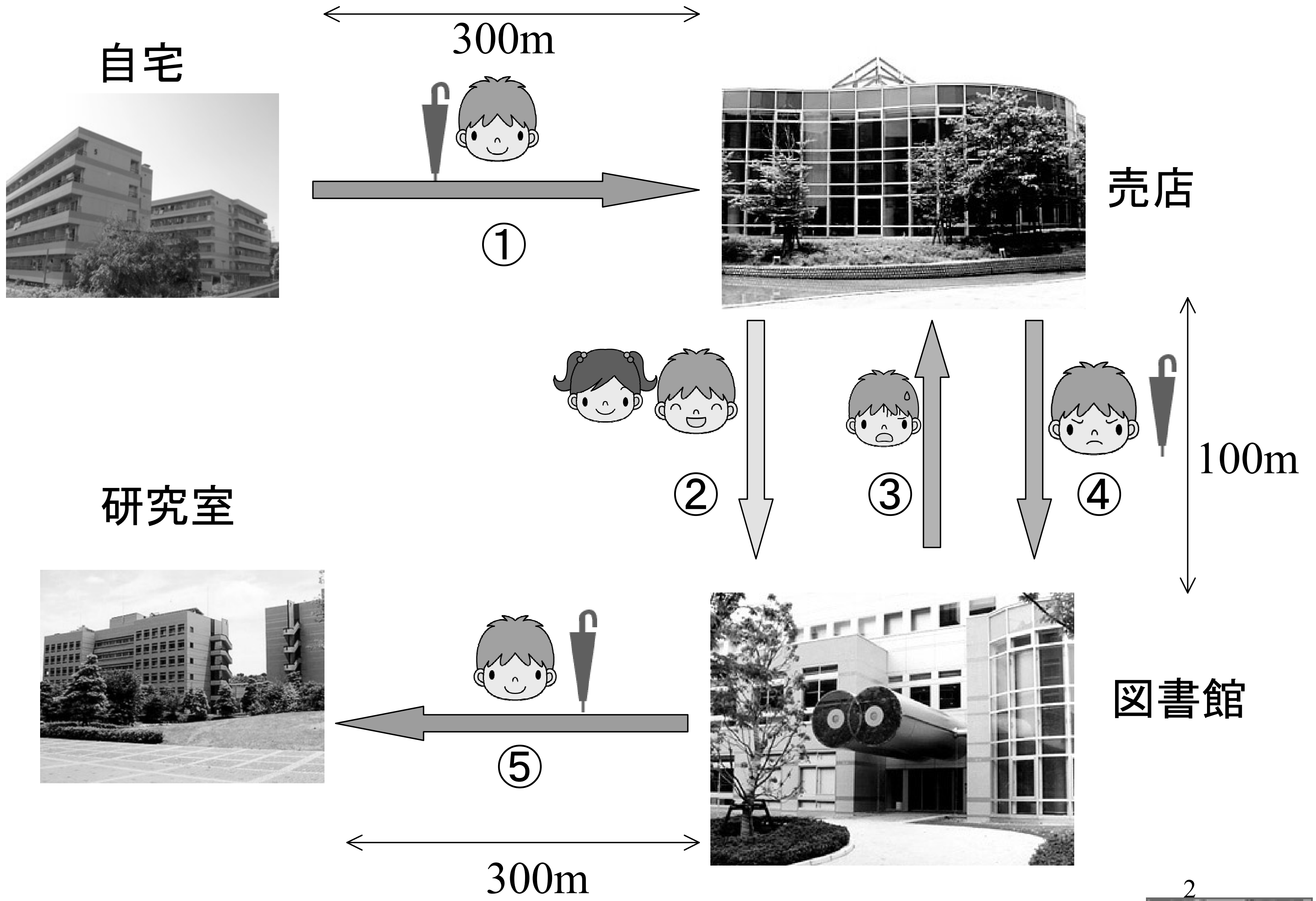
物理数学補習 第3回

2007/4/13
西田貴司 (@F511)

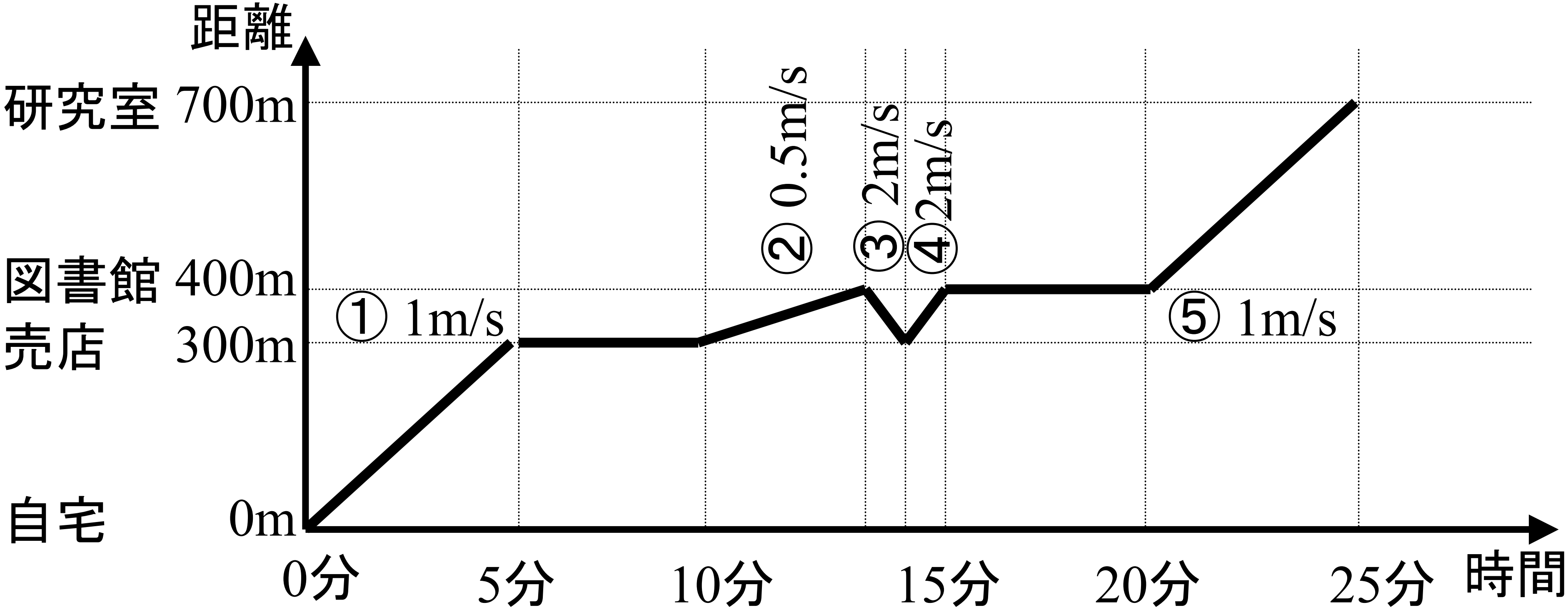
微分法を使う場合

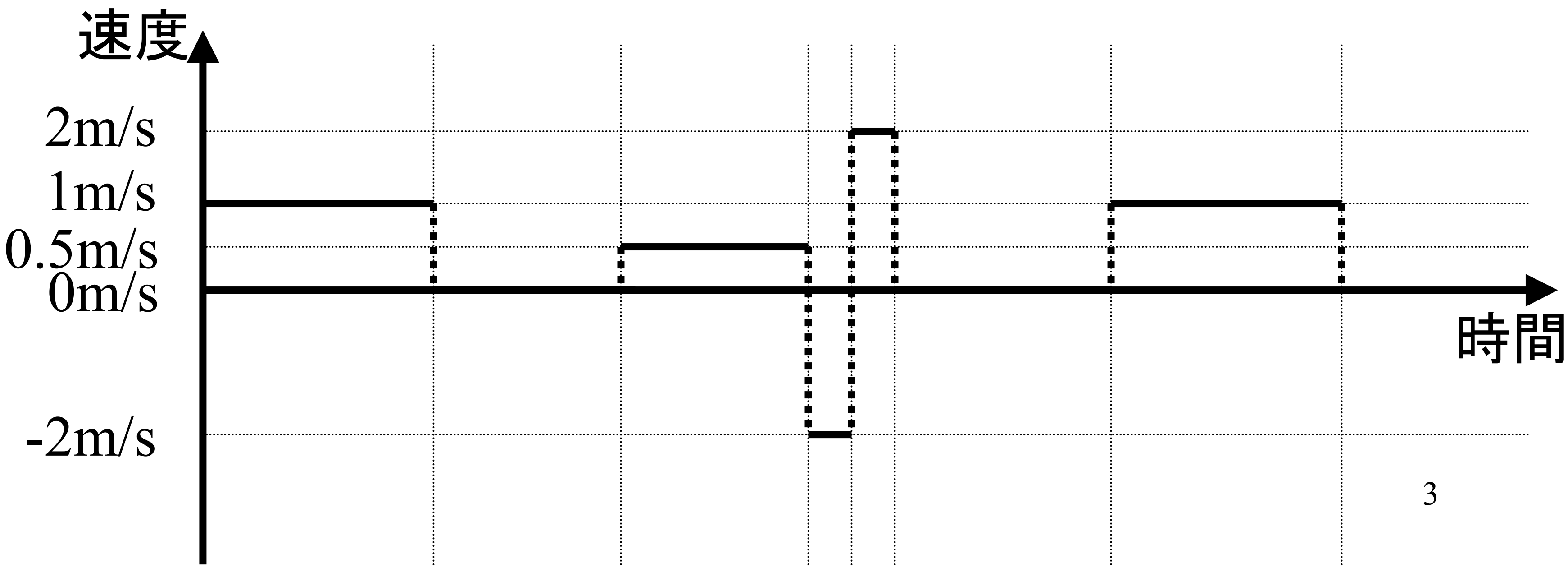
1. 時間変化などの変化率を知りたい。
   ex. 速度=距離/時間、電流=電荷/時間
2. 極大、極小点を知りたい
   ex. 安定点、最小二乗法
3. 関数のn次曲線での近似
   ex. テーラー展開、マクローリン展開
4. 自然現象の記述と解析
   ex. 微分方程式

高木貞治: 解析概論 (岩波)

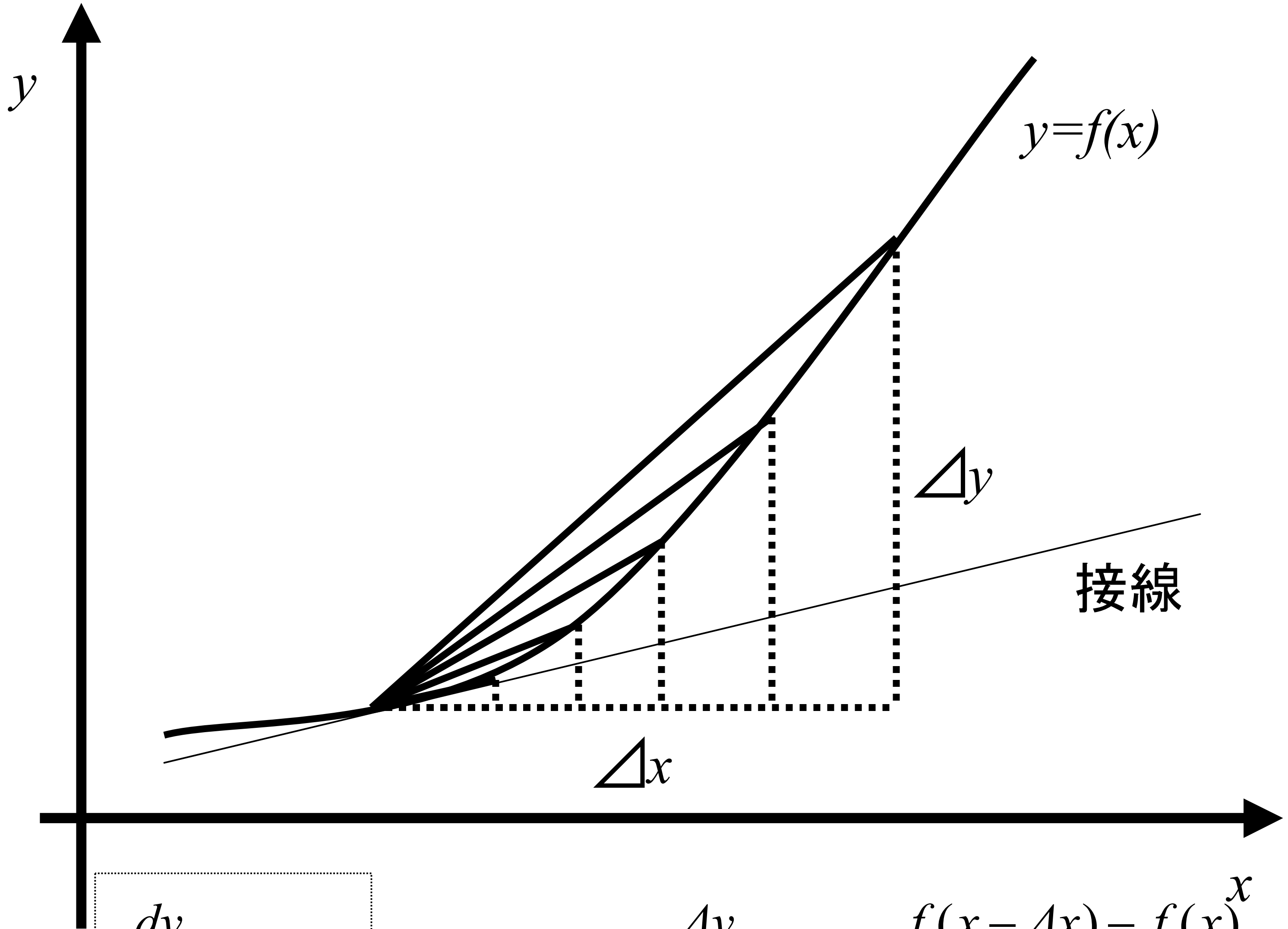


fumira.jp


距離
研究室 700m
図書館 400m
売店 300m
自宅 0m
① 1m/s
② 0.5m/s
③ 2m/s
④ 2m/s
⑤ 1m/s
0分
5分
10分
15分
20分
25分
時間


速度
2m/s
1m/s
0.5m/s
0m/s
-2m/s
時間

連続的に変化する曲線の場合



$$\frac{dy}{dx} = y' = \dot{y} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x-\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

各種の表記

微分の具体例

- $y = x^2$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$$

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - \Delta x$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$$

- $y = x^3$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2 \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta y = 3x^2 \Delta x + 3x \cdot \Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$$

演習 $y = x^4$

$\boxed{\text{解答}}$ $y = x^4$

$$y = x^4$$

$$y + \mathit{\Delta} y = (x + \mathit{\Delta} x)^4 = x^4 + 4x^3 \mathit{\Delta} x + 6x^2 \mathit{\Delta} x^2 + 4x \cdot \mathit{\Delta} x^3 + \mathit{\Delta} x^4$$

$$\mathit{\Delta} y = 4x^3 \mathit{\Delta} x + 6x^2 \mathit{\Delta} x^2 + 4x \cdot \mathit{\Delta} x^3 + \mathit{\Delta} x^4$$

$$\frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x} = 4x^3 + 6x^2 \mathit{\Delta} x + 4x \cdot \mathit{\Delta} x^2 + \mathit{\Delta} x^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathit{\Delta} y}{\mathit{\Delta} x} = 4x^3$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

パスカルの三角形

微分の具体例

- $y = x^n$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^{n-r} \Delta x^r$$

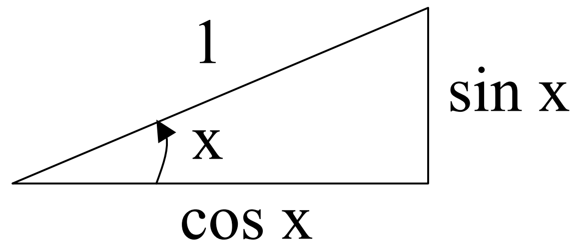
ただし ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, {}_n\mathrm{C}_1 = \dfrac{n!}{(n-1)!} = n$

$$\Delta y = \sum_{r=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_r x^{n-r} \Delta x^r = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} \Delta x + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} \Delta x + \ldots$$

$$\frac{dy}{dx} = {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} = nx^{n-1}$$

$y=\sin x$　では　$y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)=?$



三平方の定理から　$\sin^2 x+\cos^2 x=1$
オイラーの公式　$e^{ix}=\cos x+i\cdot\sin x$
$\sin(-x)=-\sin x,\cos(-x)=\cos x$

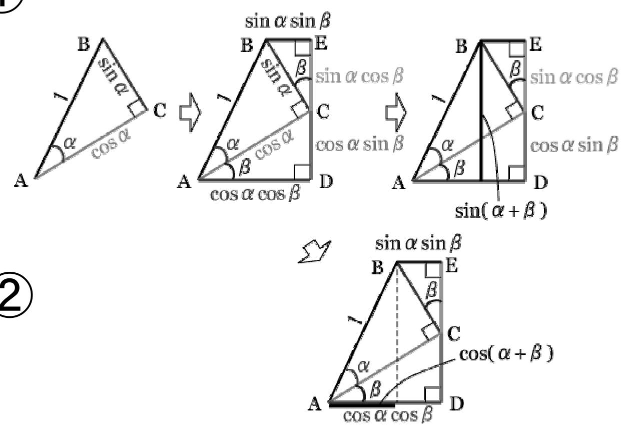
$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\cdot\sin(x+y)$　オイラー公式から..①

$e^{i(x+y)}=e^{ix}e^{iy}$　指数法則から

$=(\cos x+i\cdot\sin x)(\cos y+i\cdot\sin y)$　オイラー公式から

$=\cos x\cos y-\sin x\sin y+i\cdot\sin x\cos y+i\cdot\cos x\sin y$

$=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i\cdot(\sin x\cos y+\cos x\sin y)$　②



数学ナビゲーター

①と②から加法定理が導出

$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$
$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$

さらに

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$

$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y$

$\sin a-\sin b=2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$

$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$

$\cos a-\cos b=-2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

微分の具体例

- $y = \sin x$　　　ただし　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

ロピタル定理 or
sin x < x < tan x から
(つまり cos x< sin x/x < 1)

$$\Delta y = (y+\Delta y) - y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos(x+\Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = \cos(x+\Delta x/2)\cdot\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\underbrace{\cos(x+\Delta x/2)}_{x}\cdot\underbrace{\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}}_{1} = \cos x$$

$\boxed{演習}$　$y = \cos x$

解答 $y = \cos x$

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin(x + \frac{\Delta x}{2})\sin(\frac{\Delta x}{2})$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin(x + \Delta x/2)\sin(\Delta x/2)}{\Delta x} = -\sin(x + \Delta x/2)\cdot\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\lim_{\Delta x \to 0}\sin\underbrace{(x + \Delta x/2)}_{x}\cdot\underbrace{\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}}_{1} = -\sin x$$

基本的な関数の微分

y	微分 → y'	微分 → y''
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	e^x
$\log x$	$1/x$	$-1/x^2$

基本的な微分公式

関数の積

- $y = f(x) \cdot g(x)$

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$= f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x+\Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x) \cdot g(x+\Delta x) - f(x) \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x+\Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg(x)}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

合成関数

- $y = f(u), u = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

逆関数

- $x = f(y)$,つまり$y = f^{-1}(x)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{df(y)}{dy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^{-1}$$

微分公式の使用例

$$y = \sin x$$

- $y = \boxed{x^3}\boxed{\sin x}$

$y' = (x^3)' \sin x + x^3 (\sin x)' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$ …関数の積の微分

$= x^2 (3 \sin x + x \cos x)$

- $y = \boxed{(x^2 + 1)}^6$

$y' = 6(x^2+1)^5 \cdot (x^2+1)' = 6(x^2+1)^5 \cdot 2x$ …合成関数の微分

$= 12x(x^2+1)^5$

- $y = \sin^{-1} x = \arcsin x$, つまり $x = \sin y$ …逆関数の微分

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

> 注意:
> 特に $\sin^{-1} x$ はarcsinを表す。
> $\sin^{-1} x \neq 1/\sin x$

演習

$y = \cos x \cdot \log x$

$y = (x^2 + 3x - 5)^{10}$

$y = \cos^{-1} x$

解答

- $y=\cos x\cdot\log x$

$$y'=(\cos x)'\cdot\log x+\cos x\cdot(\log x)'=-\sin x\cdot\log x+\cos x\cdot\frac{1}{x}$$

$$\underline{y'=-\sin x\cdot\log x+\frac{\cos x}{x}}$$

- $y=(x^2+3x-5)^{10}$

$$y'=10(x^2+3x-5)^9(x^2+3x-5)'$$

$$\underline{y'=10(x^2+3x-5)^9(2x+3)}$$

- $y=\cos^{-1}x$

$$x=\cos y$$

$$\frac{dx}{dy}=-\sin y$$

$$\underline{\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

基本的な微分公式

関数の商

- $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}=f(x)\{g(x)\}^{-1}$

$$y'=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\frac{d\{1/g(x)\}}{dx}$$

$$=\frac{df(x)}{dx}\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot(-1)\cdot\frac{1}{\{g(x)\}^2}\cdot\frac{dg(x)}{dx}$$

$$\underline{y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}}$$

使用例

- $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$y'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$\underline{y'=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}}$$

演習 $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$

解答

- $y = \dfrac{e^x}{\cos x}$

$$y' = \frac{(e^x)'\cos x + e^x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}$$

$$y' = e^x \cdot \frac{\cos x + \sin x}{\cos^2 x}$$

その他の手法

対数微分法: 両辺のlogを取って微分

指数部にもxがあるときなどに利用

- $y = x^x$, ただし$(x > 0)$

x<0ではlog取れない

$\log y = \log x^x = x \log x$

両辺をxで微分

$$\frac{d(\log y)}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{d(x \cdot \log x)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (x)' \cdot \log x + x \cdot (\log x)' = \log x + 1$$

$$\frac{dy}{dx} = (\log x + 1) \cdot y = (\log x + 1)x^x$$

演習 $y = x^{\sin x}$, ただし$x > 0$

解答

- $y = x^{\sin x}$,ただし$(x > 0)$

$$\log y = \log x^{\sin x} = \sin x \log x$$

両辺をxで微分

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sin x \cdot \log x)}{dx}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = (\sin x)' \cdot \log x + \sin x \cdot (\log x)' = \cos x \log x + \frac{\sin x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x} \right) x^{\sin x}$$

高階微分、偏微分、ベクトル微分

- 高次の微分

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = f''$$

- 偏微分

$\partial / \partial x, \ \partial / \partial y$

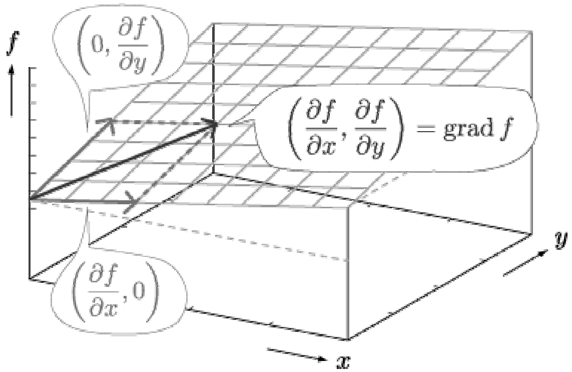
- ベクトル微分演算子

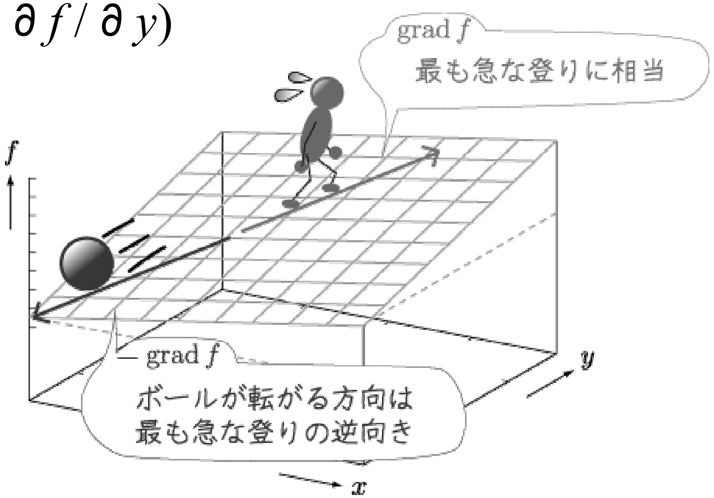
grad V (gradient 勾配), div **E** (divergence 発散), rot **E** (rotation 回転)

(∇V, $\nabla \cdot \mathbf{E}$, $\nabla \times \mathbf{E}$)

$\nabla = (\partial / \partial x , \ \partial / \partial \underline{y}, \ \partial / \partial z)$

意味: 2次元の場合: grad $f = (\partial f / \partial x, \ \partial f / \partial y)$





div, rot の意味については別紙

微分方程式

自然現象の記述に必要

- 例: 先日の小テストの問題

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=0$$

- 右図のような力学系

ニュートンの運動方程式

$$F=ma=m\frac{dv}{dt}=m\frac{d^2y}{dt^2} \qquad \cdot\cdot①$$

ばね(ばね係数k)

$$F=-ky \qquad \cdot\cdot②$$

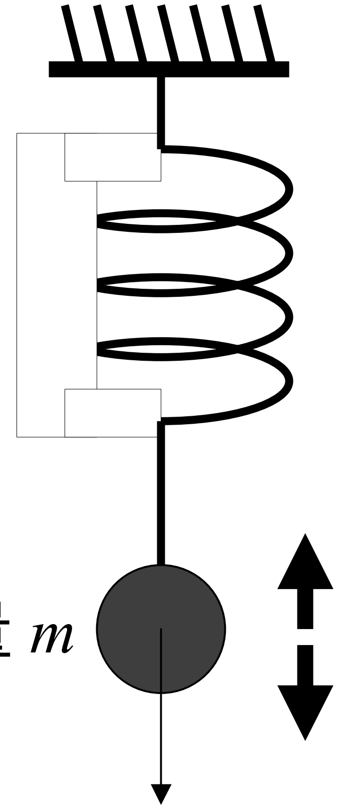
①, ②から

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-ky$$

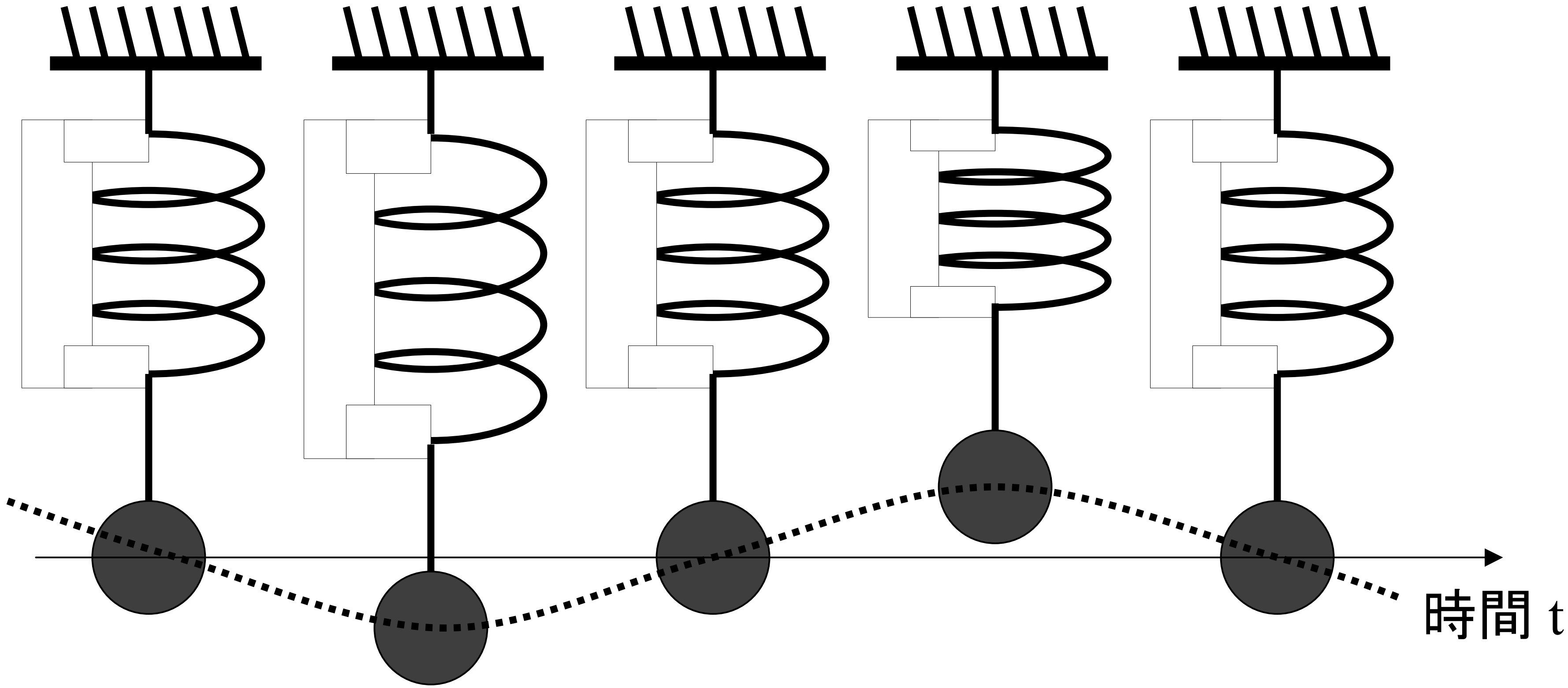
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{k}{m}y=0$$

これは冒頭の式と同じ、つまり

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=0, \text{ただし}\,\omega^2=\frac{k}{m}}$$



系の挙動



一定周期の振動になりそう。

微分方程式の解

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2 y=0,\text{つまり},\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}}=-\omega^2\boxed{y}$$

上記の式から、解としては、2階微分で同じ形の関数、
そのため $\sin x$, $\cos x$, e^xなどが考えられる。具体的には

$$\begin{cases}\sin\omega t\\ \cos\omega t\\ e^{i\omega t}\end{cases}$$ など。

y	y'	y''
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	e^x
$\log x$	$1/x$	$-1/x^2$

解(一般解)は

$$y(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

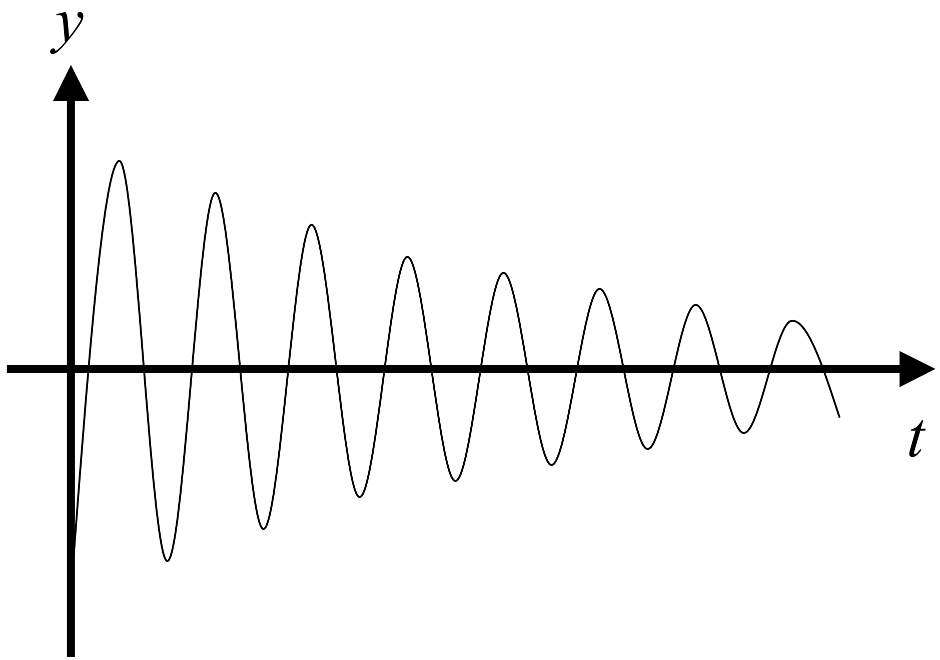
A,Bは定数で、初期条件や境界条件を与えることで決まる。(特殊解)

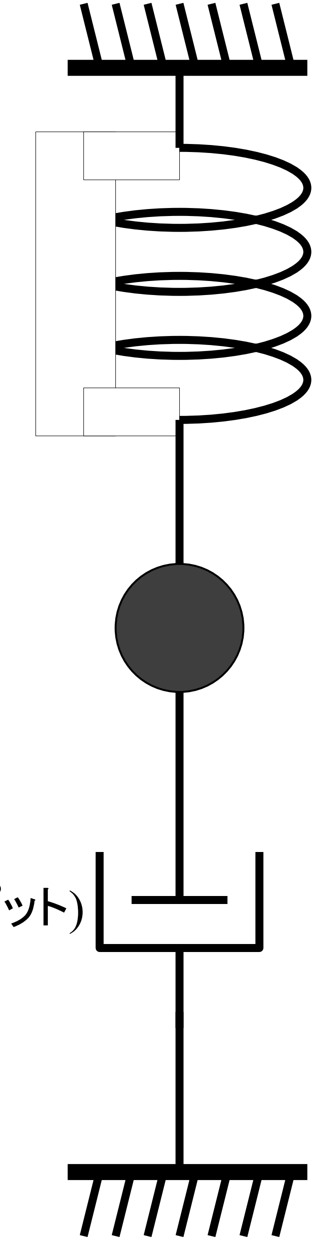
$$\underline{y(t)=Ce^{+i\omega t}+De^{-i\omega t}}=C(\cos\omega t+i\sin\omega t)+D(\cos\omega t-i\sin\omega t)$$

$$=(C+D)\cos\omega t+i(C-D)\sin\omega t=A\sin\omega t+B\cos\omega t$$

力学系と微分方程式 その2

ダンパー(振動吸収器)を入れた
→減衰振動になりそう。(ダンパーが弱ければ)





ダンパ
(ダッシュポット)
$F=-\eta v$
$=-\eta(dy/dt)$

運動方程式(質量mのおもり) $F = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

バネによる力 $F_s = -ky$

ダンパによる力 $F_d = -\eta v = -\eta \cdot \dfrac{dy}{dt}$

$F = Fs + Fd$,これから、$m\dfrac{d^2y}{dt^2} + \boxed{\eta\dfrac{dy}{dt}} + ky = 0$

力学系と微分方程式 その2

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\eta\frac{dy}{dt}+ky=0$$

の解は?

減衰振動を仮定

$$y(t)=e^{-at}\cos\omega t$$

すると y', y'' は

$$y'=-ae^{-at}\cos\omega t-\omega e^{-at}\sin\omega t$$

$$y''=(a^2-\omega^2)e^{-at}\cos\omega t+2a\omega e^{-at}\sin\omega t$$

すると y, y', y'' を微分方程式に代入して

$$0=my''+\eta y'+y$$

$$=m(a^2-\omega^2)e^{-at}\cos\omega t+2ma\omega e^{-at}\sin\omega t-\eta ae^{-at}\cos\omega t-\eta\omega e^{-at}\sin\omega t+ke^{-at}\cos\omega t$$

$$=\underbrace{\boxed{\left\{m(a^2-\omega^2)-\eta a+k\right\}}}_{①}e^{-at}\cos\omega t+\underbrace{\boxed{\left\{2ma\omega-\eta\omega\right\}}}_{②}e^{-at}\sin\omega t$$

全体が0なので、①=0, ②=0。これで、a,ωを求める

②=0から

$$2ma\omega=\eta\omega\rightarrow \underline{a=\frac{\eta}{2m}}$$

①=0から

$$m(a^2-\omega^2)-\eta a+k=0$$

$$\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}$$

$\underline{\omega=\sqrt{\omega_0^2-a^2}}$、ただし $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$

力学系と微分方程式 その2

同様に

$$y(t) = e^{-at}\sin\omega t$$

も解。したがって一般解は

$$y(t) = Ae^{-at}\cos\omega t + Be^{-at}\sin\omega t$$

A, Bは定数

ただし。

$$a = \frac{\eta}{2m}, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}, \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

力学系と微分方程式 その2

別の解き方

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\eta\frac{dy}{dt}+ky=0$$

解として下記を仮定

$y(t)=e^{zt}, Z$は複素数$Z=(-a+i\omega)$

代入すると

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\eta\frac{dy}{dt}+ky=mZ^2e^{Zt}+\eta Ze^{Zt}+ke^{Zt}=(mZ^2+\eta Z+k)e^{Zt}=0$$

これからZの2次式が得られる。

$$mZ^2+\eta Z+k=0$$

解くと

$$Z=\frac{-\eta\pm\sqrt{\eta^2-4mk}}{2m}=\left\{-\frac{\eta}{2m}\right\}\pm\left\{i\cdot\sqrt{\frac{4mk-\eta^2}{4m^2}}\right\}$$

$$Z=\left\{-\frac{\eta}{2m}\right\}\pm\left\{i\cdot\sqrt{\frac{k}{m}-\left(\frac{\eta}{2m}\right)^2}\right\}=-a\pm i\omega$$

ただし。

$$a=\frac{\eta}{2m},\omega=\sqrt{\omega_0^2-a^2},\omega_0^2=\frac{k}{m}$$

一般解は

$$y(t)=Ae^{(-a+i\omega)t}+Be^{(-a-i\omega)t}=Ce^{-at}\cos\omega t+De^{-at}\sin\omega t$$

いろいろな微分方程式

1階微分方程式

変数分離形 : $y' = g(x)h(y)$

同次形 : $y' = f(\frac{y}{x})$

1階線形微分方程式 : $y' + P(x)y = Q(x)$

ベルヌーイの微分方程式 : $y' + P(x)y = Q(x)y^n$

リッカチの微分方程式 : $y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0$

完全微分方程式 : $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, ただし $Py = Qx$

クレローの微分方程式 : $y = y'x + f(y')$

ラグランジュの微分方程式 : $y = f(y')x + g(y')$

2階微分方程式

2階線形微分方程式 : $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$

2階オイラーの方程式 : $x^2 y'' + axy' + by = 0$

ルジャンドルの微分方程式 : $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

ベッセルの微分方程式 : $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$

それぞれについて解法がある。

微分方程式の解法

- 演算子法
  線形の微分方程式(高階定数係数微分方程式など)に
  ラプラス変換
  フーリエ変換

- 級数解法
  ルジャンドル、ベッセルの微分などに

- 数値計算による解法
  ルンゲクッタ法、オイラー法、有限要素法、境界要素法など

数式処理ソフトウェアによる微分、微分方程式

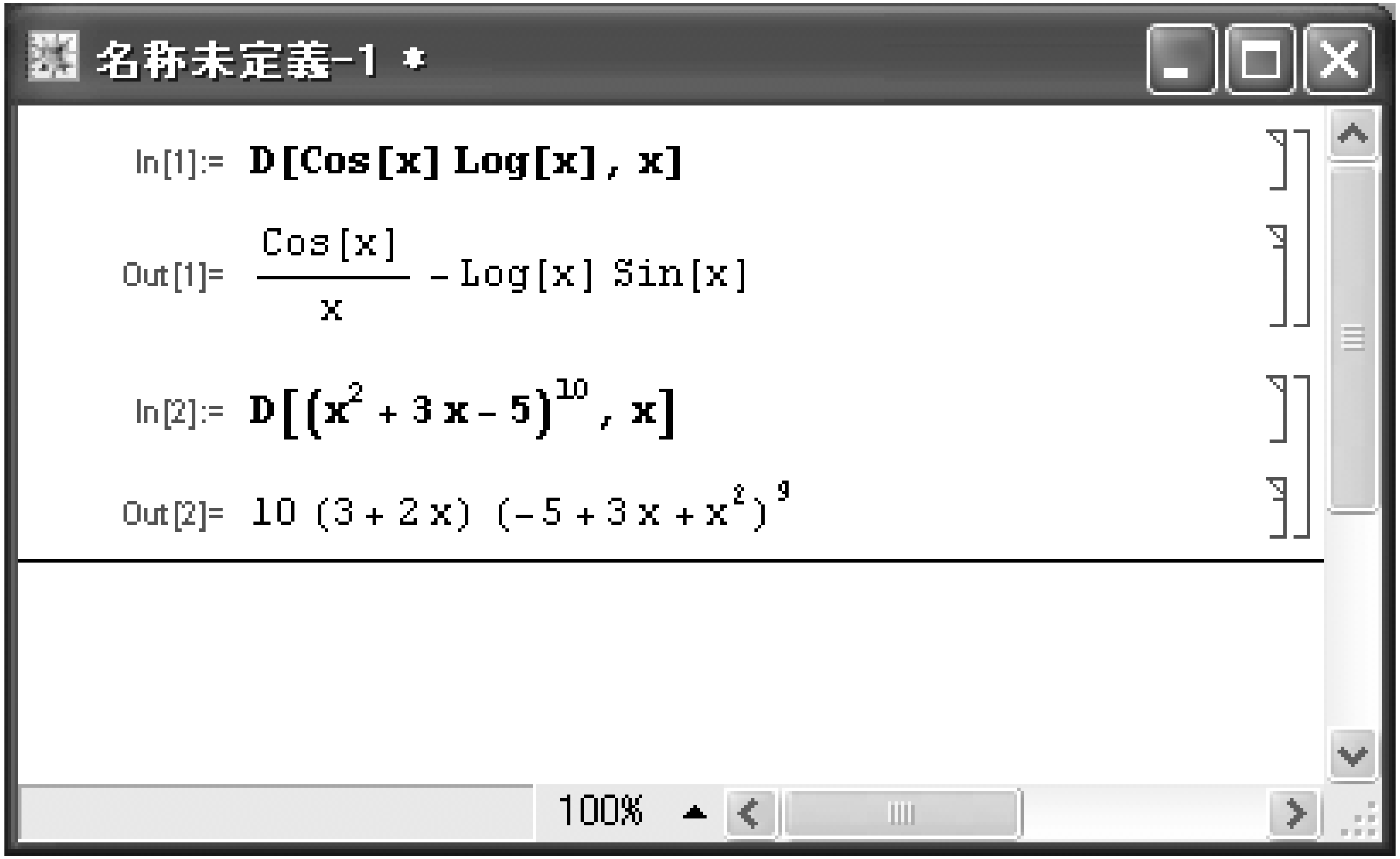
数式処理ソフトウェア

- Mathematica (Wolfram research社)
  - ・高機能、高価
  - ・ITC共用パソコンに入っています。
- MAPLE (Maple soft社)
  - ・高機能、高価
- MuPAD (Sciface Software社)
  - ・安価
- Maxima
  - ・オープンソース GPL

くわしくはこちら http://www.bekkoame.ne.jp/~ponpoko/Math/Math.html

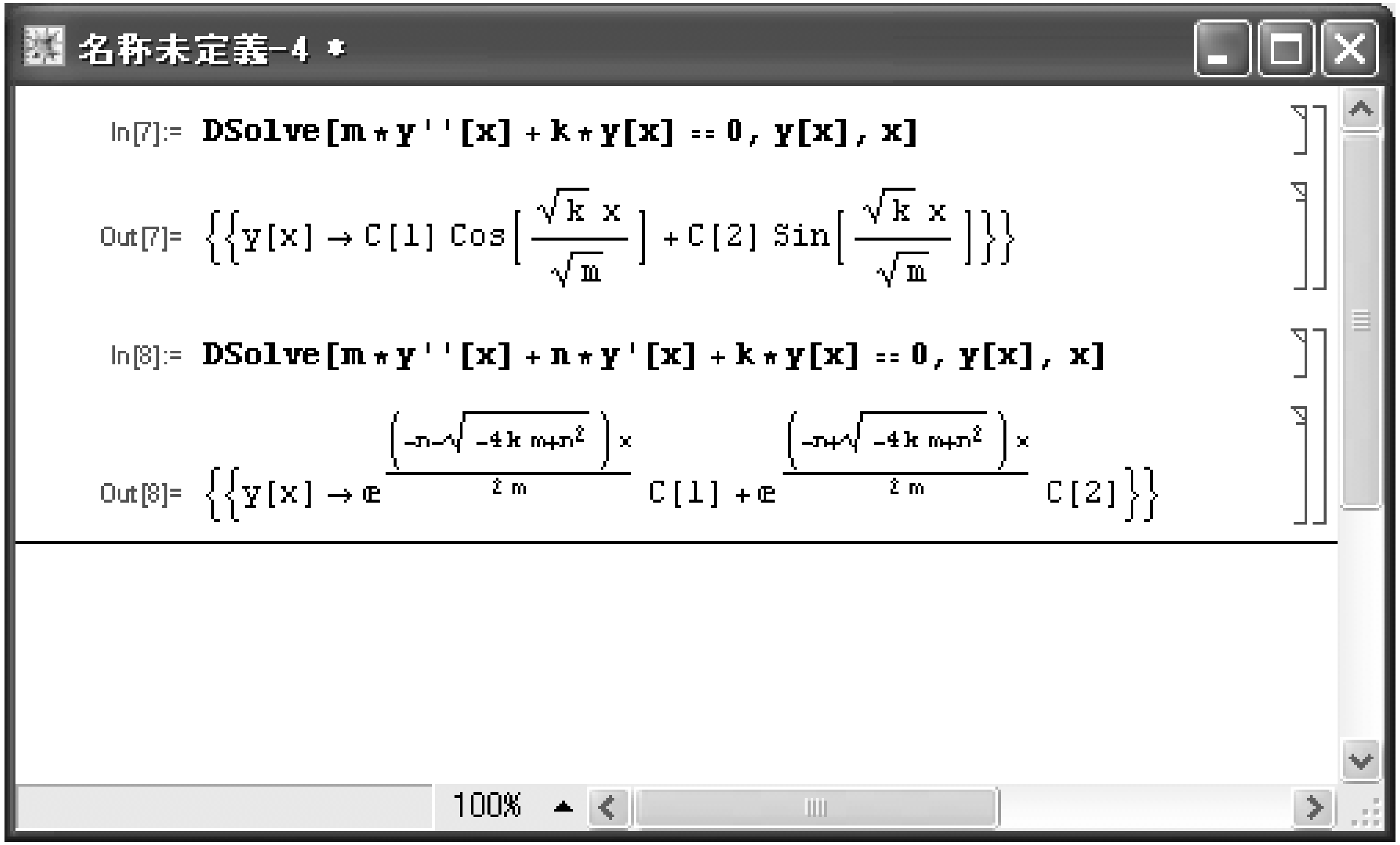
数式処理ソフトウェアによる微分

Mathematicaで微分の計算



数式処理ソフトウェアによる微分

Mathematicaで微分方程式の計算



実際にITC共用パソコンにて操作してみてください。

アンケート

・説明はわかりましたか

(1)よく, (2)わかった, (3)ふつう, (4) わからなかった, (5)まったくわからない

・内容について

(1)もっと簡単に, (2)ちょうどよい, (3)もっと難しく

・説明の展開について

(1)速すぎ, (2)速い, (3)ふつう, (4)遅い, (5)遅すぎ

・次年度のこの講義(物理数学 微分法の復習・演習)の実施について(複数回答可)

(1) 不要, (2) もっと短時間に, (3) このままでよい, (4) もっと丁寧に, (5) 重要

・説明と演習をしましたが

(1) 説明を不要、演習のみで、(2) 演習のみで、説明は不要、(3) 説明をふやす、(4)演習を増やす、
(5)ちょうどよい

・演習のやりかたについて

(1)何人か指名して前で行う、(2)各自卓上で(今回)、(3)演習は各自持ち帰ってやる(後日提出) 、
(4)演習は各自持ち帰ってやる(提出なし)

・セクション「微分法の導入」についての感想(複数回答可)

(1) 満足、(2) 不要、(3)理解できなかった、(4)寝ていた、(5)もっと詳しく、(6)もっと高度に, (7)その他______________________

・セクション「各種微分法(偏微分etc)」についての感想(複数回答可)

(1) 満足、(2) 不要、(3)理解できなかった、(4)寝ていた、(5)もっと詳しく、(6)もっと高度に, (7)その他______________________

・セクション「微分方程式」についての感想(複数回答可)

(1) 満足、(2) 不要、(3)理解できなかった、(4)寝ていた、(5)もっと詳しく、(6)もっと高度に, (7)その他______________________

・セクション「数式処理による微分、微分方程式」についての感想(複数回答可)

(1) 満足、(2) 不要、(3)理解できなかった、(4)寝ていた、(5)もっと詳しく、(6)もっと高度に, (7)その他______________________

・あなたの希望する研究では、微分法、微分方程式は必要ですか?(予想でよいです)

(1)必須、(2)あまりいらない、(3)使いたくない、(4)フル活用したい、(5)使わない研究テーマ希望

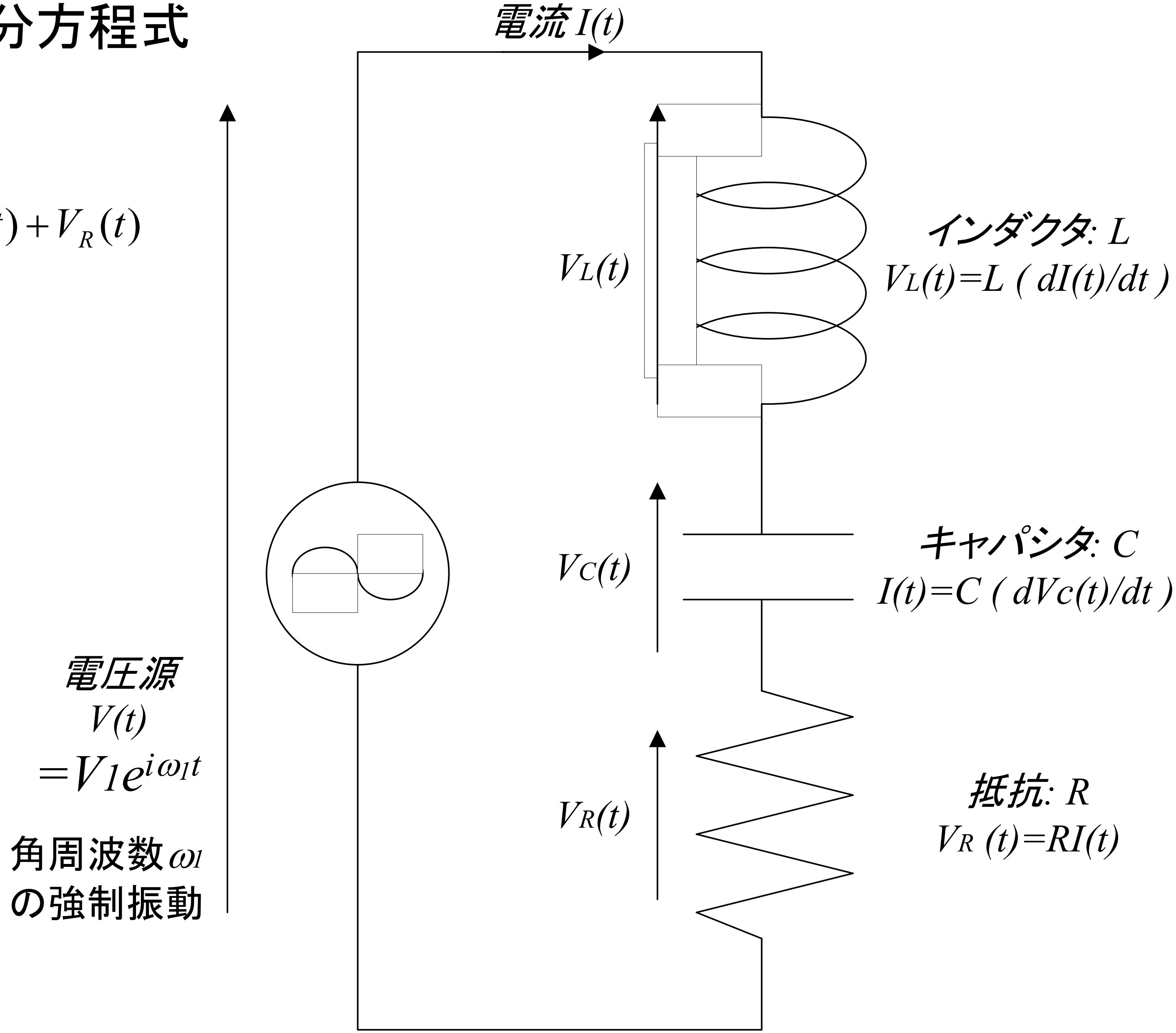
・その他感想がありましたら

これからあとは予備資料

電気回路と微分方程式

右図より

$$
\begin{cases}
V(t) = V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) \\
V_L(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} \\
I(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt} \\
V_R(t) = RI(t)
\end{cases}
$$



電気回路と微分方程式

$$
\begin{cases}
V(t) = V_L(t) + V_C(t) + V_R(t) \\
V_L(t) = L\dfrac{dI(t)}{dt} \\
I(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt} \\
V_R(t) = RI(t)
\end{cases}
$$

解くために微分方程式

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{dV_L(t)}{dt} + \frac{dV_C(t)}{dt} + \frac{dV_R(t)}{dt}$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}I(t) + R\frac{dI(t)}{dt}$$

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2} + R\frac{dI(t)}{dt} + \frac{1}{C}I(t) = P(t)$$

ただし, $P(t) = \dfrac{dV(t)}{dt} = \dfrac{d(V_1 e^{i\omega_1 t})}{dt} = i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t}$

電気回路と微分方程式

$$L\frac{d^2I(t)}{dt^2}+R\frac{dI(t)}{dt}+\frac{1}{C}I(t)=\underline{i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t}} \qquad ①$$

これの解(一般解)は*I1, I2*の和

$$\begin{cases} L\dfrac{d^2I_1(t)}{dt^2}+R\dfrac{dI_1(t)}{dt}+\dfrac{1}{C}I_1(t)=\underline{0} \\ L\dfrac{d^2I_2(t)}{dt^2}+R\dfrac{dI_2(t)}{dt}+\dfrac{1}{C}I_2(t)=P(t)=i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t} \end{cases}$$

左式の一般解…過渡応答

①式の特解…定常応答

これは、線形方程式なので。確かめる。

$$L\frac{d^2\{I_1(t)+I_2(t)\}}{dt^2}+R\frac{d\{I_1(t)+I_2(t)\}}{dt}+\frac{1}{C}\{I_1(t)+I_2(t)\}=P(t)$$

$$L\frac{d^2I_1(t)}{dt^2}+L\frac{d^2I_2(t)}{dt^2}+R\frac{dI_1(t)}{dt}+R\frac{dI_2(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_1(t)+\frac{1}{C}I_2(t)=P(t)$$

$$\underbrace{\left[L\frac{d^2I_1(t)}{dt^2}+R\frac{dI_1(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_1(t)\right]}_{0}+\underbrace{\left[L\frac{d^2I_2(t)}{dt^2}+R\frac{dI_2(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_2(t)\right]}_{P(t)}=P(t)$$

$$0+P(t)=P(t)$$

電気回路と微分方程式

定常応答*I2*を求める。

$$L\frac{d^2I_2(t)}{dt^2}+R\frac{dI_2(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_2(t)=i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t}$$

右辺にexp(iω1t)があるので、I2もI_0 exp(iω1t) を仮定。
このI_0 は定数で未知数、これを求める。

$$L\frac{d^2I_2(t)}{dt^2}+R\frac{dI_2(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_2(t)=i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t}$$

$$I_2(t)=I_0 e^{i\omega_1 t}$$

$$(i\omega_1)^2 LI_0 e^{i\omega_1 t}+(i\omega_1)RI_0 e^{i\omega_1 t}+\frac{1}{C}I_0 e^{i\omega_1 t}=i\omega_1 V_1 e^{i\omega_1 t}$$

$$\left\{i\omega_1 L+R+\frac{1}{i\omega_1 C}\right\}I_0=V_1$$

$$I_0=\frac{V_1}{i\omega_1 L+R+\dfrac{1}{i\omega_1 C}}$$

それで、$\underline{I_2(t)=I_0 e^{i\omega_1 t}}$

これは、解の一部に過ぎない。
(初期条件で決まる定数がない)

電気回路と微分方程式

過渡応答*I1*を求める。

$$L\frac{d^2 I_1(t)}{dt^2}+R\frac{dI_1(t)}{dt}+\frac{1}{C}I_1(t)=0$$

これから、

$$L(s)^2+Rs+\frac{1}{C}=0,\text{ただし、}I_1(t)=Ae^{st}\text{として}$$ (sは未知数、これを求める。)

$$s=-\left[\frac{R}{2L}\right]\pm i\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]=s_1,s_2$$

$$\underline{I_1(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}}$$ A, Bは未知数。初期条件で決まる。

これから、

$$I(t)=I_1(t)+I_2(t)=\underline{Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+I_0e^{i\omega_1t}}$$

ただし、

$$s_1,s_2=-\left[\frac{R}{2L}\right]\pm i\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}\right]$$

$$I_0=\frac{V_1}{i\omega_1L+R+\frac{1}{i\omega_1C}}$$

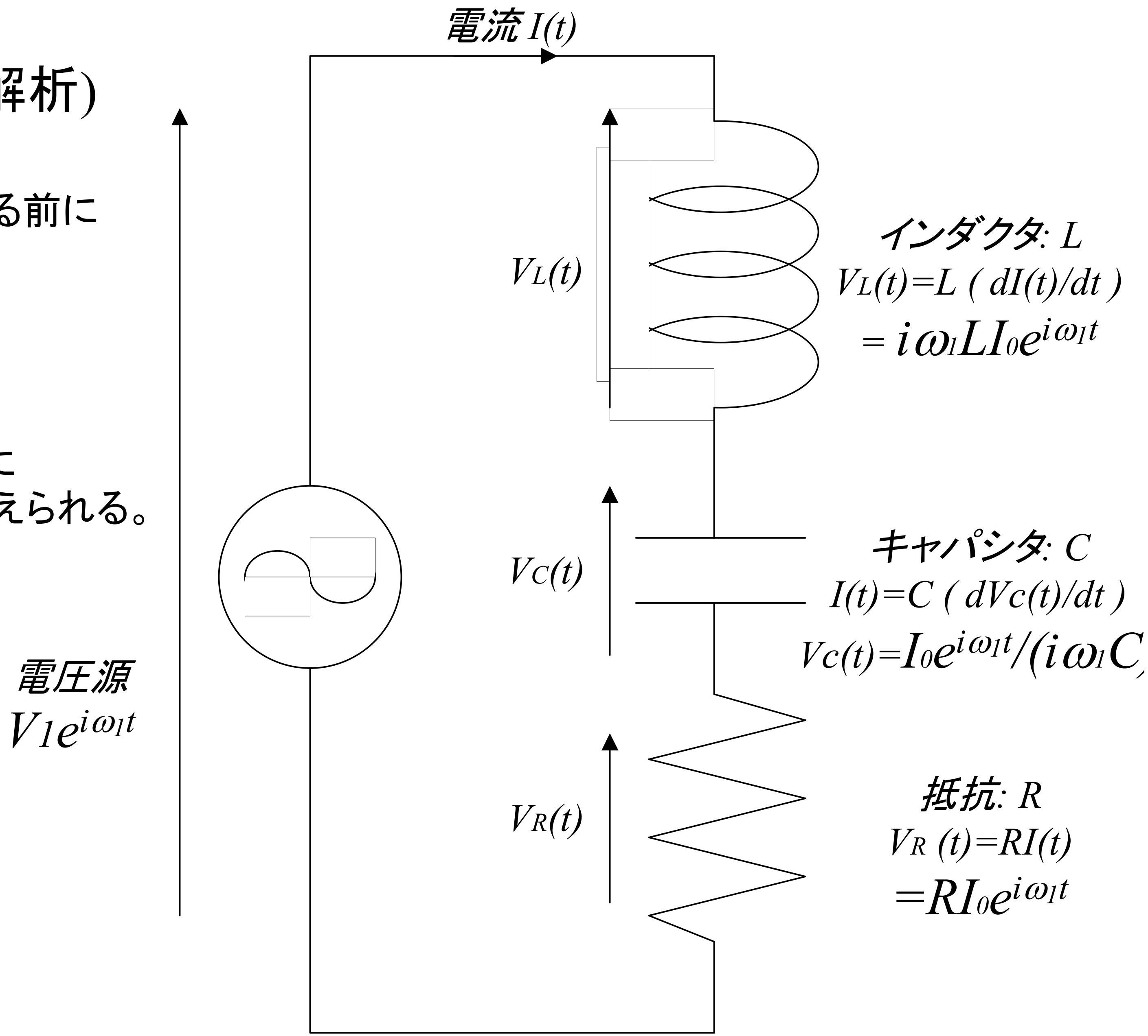
電気回路の解析
(インピーダンス解析)

微分方程式を立てる前に

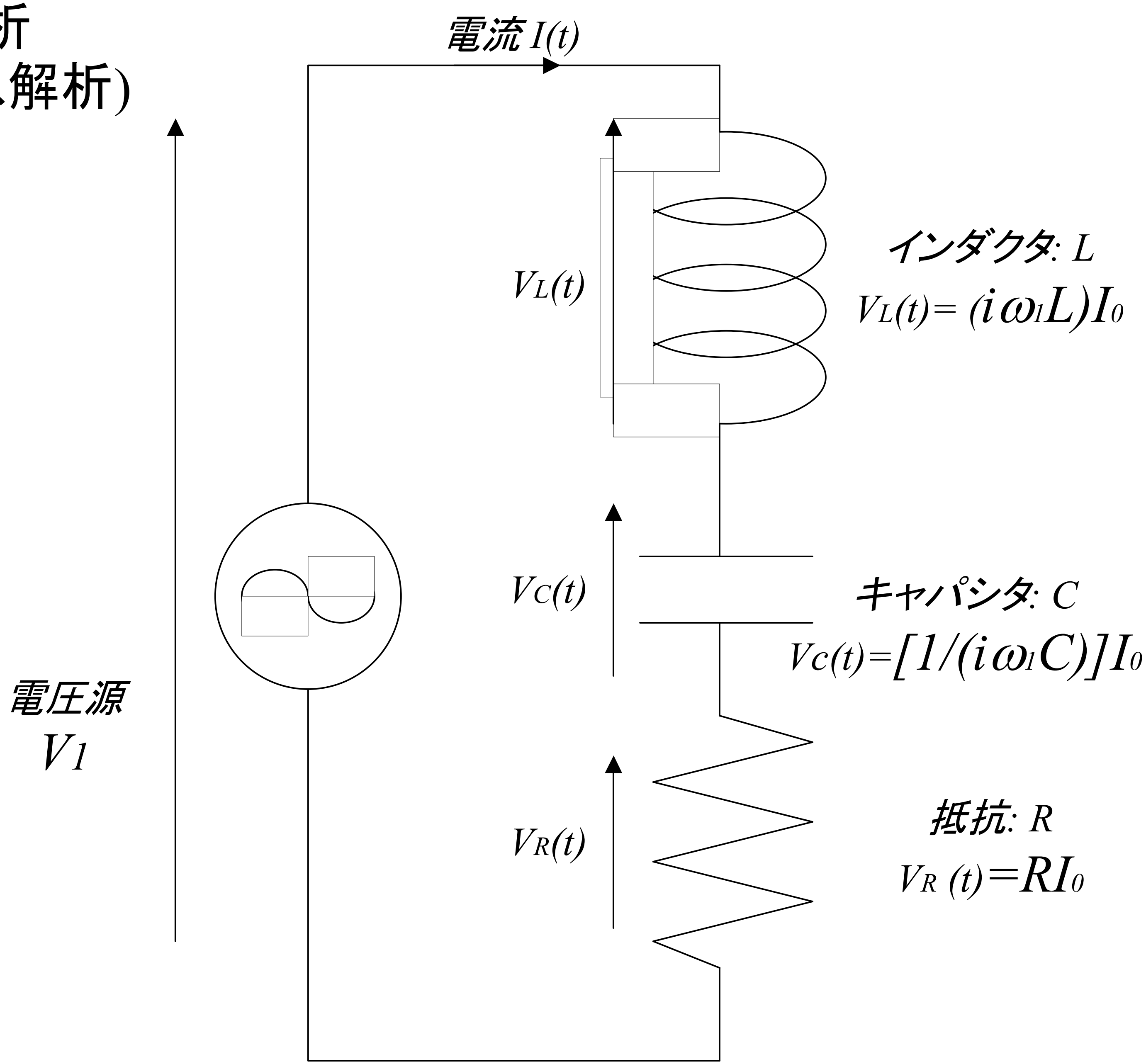
$I(t)=I_0e^{i\omega_1 t}$

を代入する。

すると、右図のように
微分が$i\omega_1$に置き換えられる。



電気回路の解析
(インピーダンス解析)

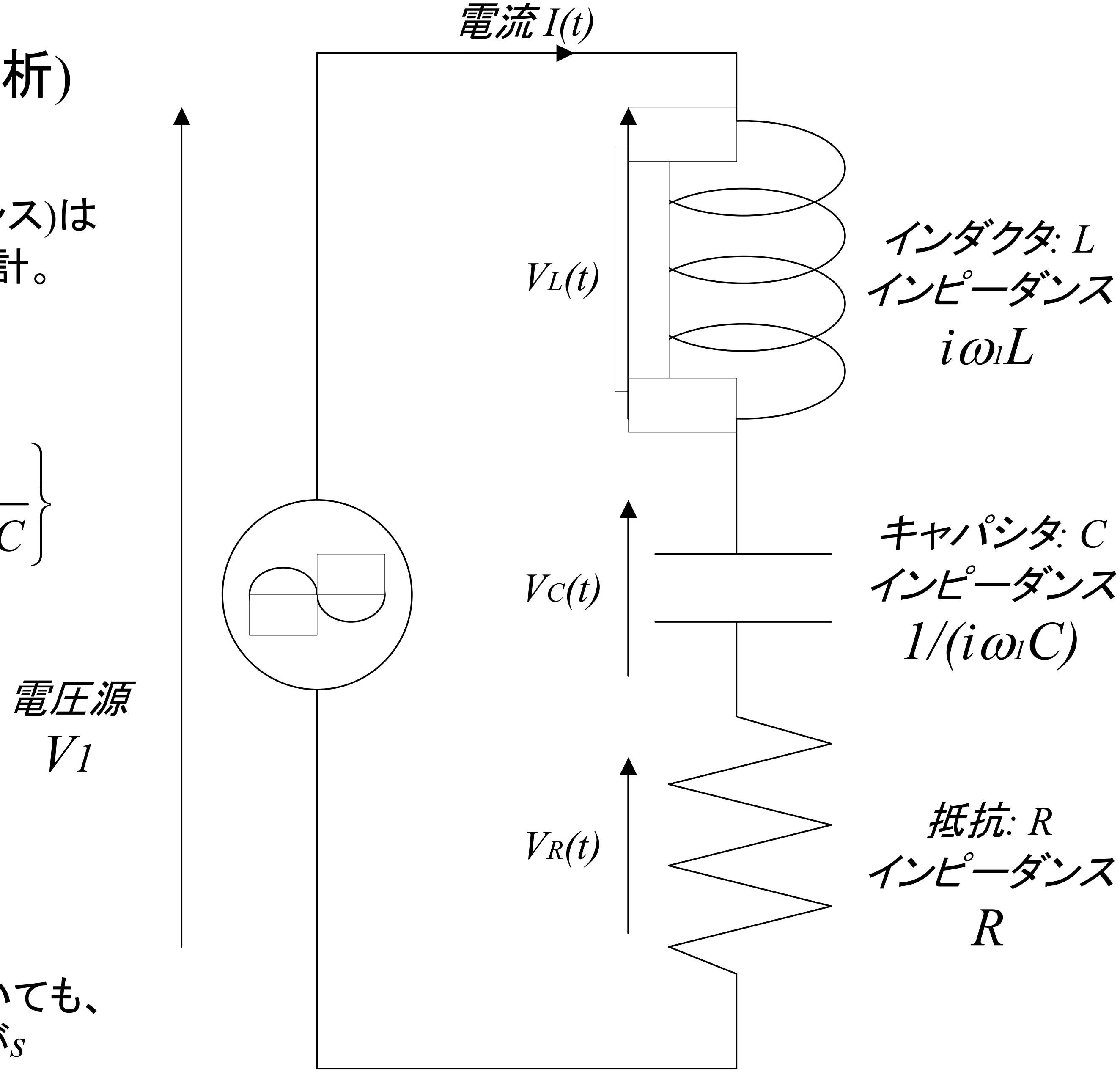


電気回路の解析
(インピーダンス解析)

合成抵抗(インピーダンス)は
各インピーダンスの合計。
なので、

$$V_1 = I_0 Z_{total}$$
$$= I_0 \left\{ i\omega_1 L + R + \frac{1}{i\omega_1 C} \right\}$$

前述の式と同じ式。
つまり、
微分方程式を
解く必要はない。



なお、過渡応答についても、
ラプラス変換で微分がs
に置き換えれるので、同様な解析

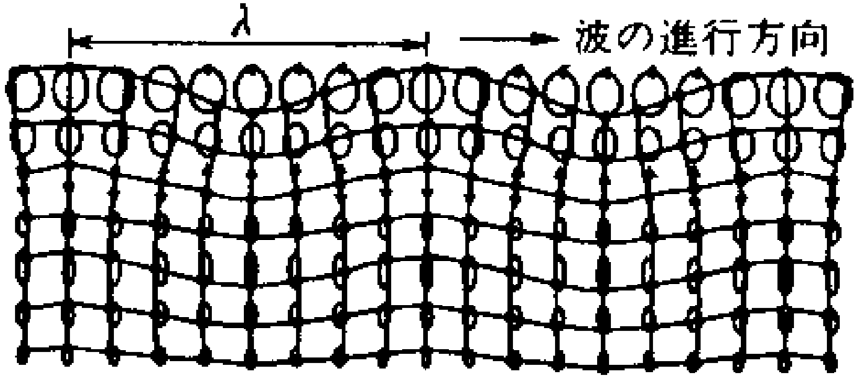
圧電振動の解析
(弾性表面波)

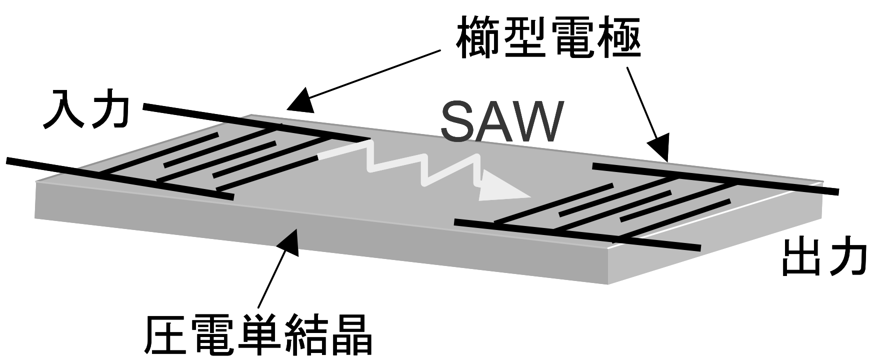
P波 (縦波)　S波 (横波)　SAW (表面弾性波)

→ 時間

地震波

弾性表面波
→表面を伝わる波





圧電振動の解析
(弾性表面波)

運動方程式 $$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}$$

静電基本式 $$\frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0$$

$$E_i = -\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

圧電方程式 $$T_{ij} = C_{ijkl}S_{kl} - e_{kij}E_k$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k + e_{ikl}S_{kl}$$

歪みと変位の関係式 $$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} &e_{ikl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} - \varepsilon_{ik}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \\ &\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_l} - e_{kij}\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_k \partial x_j} \end{aligned}}$$

圧電振動の解析
(弾性表面波)

ここで, 表面波速度 v で x_1方向に伝搬する弾性表面波を表す解

$$u_j = \alpha_j exp(ikbx_3) exp\{ik(x_1 - vt)\} \qquad (j = 1、2、3)$$

$$\phi = \alpha_4 exp(ikbx_3) exp\{ik(x_1 - vt)\}$$

を仮定、境界条件を満たすような v を探す。(数値計算)